

Description

II

diélectrique d'un milieu anisotrope.

Forme générale de l'équation de dispersion

Nous allons rappeler ici les caractères fondamentaux de la propagation des ondes dans un milieu quelconque. La théorie de Maxwell permet, en caractérisant le milieu par des grandeurs macroscopiques, de préciser la « réponse linéaire » à une excitation donnée, perturbant le milieu. Si ce dernier est homogène et stationnaire, cette réponse sera représentée par une superposition d'ondes planes de fréquence angulaire ω et de longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{k}$; pour chaque composante, le milieu présentera un indice N , en général fonction de ω et de k : c'est ce phénomène qu'on appelle *dispersion*, et c'est l'étude de cette dispersion, en particulier de la condition d'existence de l'onde (ω, k) dans le milieu — l'équation de dispersion — qui va faire l'objet de ce chapitre.

2.1. Propagation des ondes planes. Oscillations propres et oscillations forcées

Tout au long de cet exposé, on s'intéressera aux plasmas faiblement écartés de l'équilibre, qu'on peut donc décrire par des équations linéaires.

Partant d'un état d'équilibre connu, caractérisé par les valeurs g_0 d'un ensemble de paramètres g , on peut en effet linéariser¹ les équations définissant la perturbation du milieu, laquelle est caractérisée par les paramètres $g_1 = (g - g_0) \ll g_0$. On obtient ainsi des équations différentielles linéaires en g_1 , dont les coefficients ne dépendent que des valeurs g_0 à l'équilibre. Pour un équilibre stationnaire et homogène, ces équations linéaires sont donc à coefficients constants et on peut en chercher des solutions du type

$$(2.1.1) \quad g_1 = G e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

où \mathbf{k} est un vecteur constant et ω une constante qui apparaîtra comme une pul-

1. Nous reviendrons plus tard (chap. 8) sur les conditions de validité de la linéarisation.

sation. Ces solutions sont des *ondes planes* : les surfaces équiphases (les surfaces d'onde) sont définies par

$$(2.1.2) \quad \Phi = \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t = k_1 x + k_2 y + k_3 z - \omega t = C^{te}.$$

A un instant donné on a donc un *plan d'onde*, normal au vecteur \mathbf{k} . Précisons que l'origine des coordonnées et celle du temps sont arbitraires : étant homogène et stationnaire, le plasma possède les propriétés de translation $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ et $t' = t + t_0$ dans l'espace et dans le temps. L'équation (2.1.2) définit donc, à un instant donné, une famille de plans d'onde tous perpendiculaires à la direction \mathbf{k} (fig. 2.1).

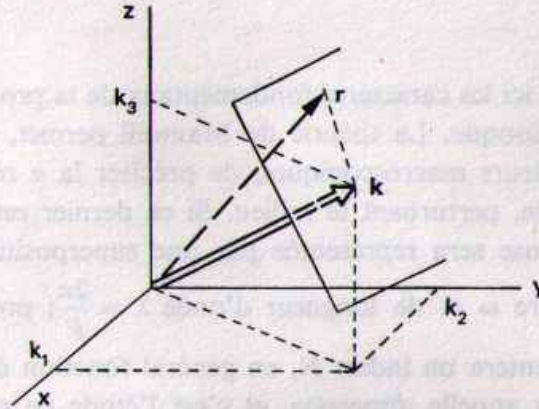


FIGURE 2.1.

Plan d'onde et vecteur d'onde \mathbf{k}

Lorsque le temps varie, un plan d'onde, caractérisé par une phase constante $\Phi = \Phi_0$, va se déplacer, en restant parallèle à lui-même; dans ce plan, un point *fixé*, de coordonnées x, y, z , va se mouvoir parallèlement à la direction \mathbf{k} : sa vitesse \mathbf{v} satisfait donc à

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} = kv$$

où k et v sont les modules des vecteurs correspondants. La phase étant constante, écrivons que sa variation, au cours du temps, est nulle :

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) = \mathbf{k} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} - \omega = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} - \omega$$

soit

$$0 = kv - \omega.$$

La famille de plans d'onde se déplace donc parallèlement à \mathbf{k} , avec la vitesse

$$(2.1.3) \quad u = \frac{\omega}{k} = v_\phi$$

qui est la *vitesse de phase*. On caractérise alors le milieu par son *indice*

$$(2.1.4) \quad N = \frac{c}{v_\varphi} = \frac{kc}{\omega}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

Dans (2.1.1), le facteur G est l'amplitude, de l'onde définie par les constantes \mathbf{k} et ω . On aura donc $G = G(\mathbf{k}, \omega)$, caractérisant la solution. Un changement de coordonnées, dans le temps et dans l'espace, donnera d'après (2.1.2), un changement de phase $\Phi' = \Phi + A$, où $A = C t^0$; dans (2.1.1), cela aura pour effet de multiplier l'amplitude par un facteur e^{iA} .

Par ailleurs, les équations de Maxwell sont linéaires. Pour un milieu homogène, infini et stationnaire, ces solutions ondes planes ne vérifieront ces équations de Maxwell que lorsque certaines conditions entre ω et \mathbf{k} seront satisfaites; l'étude des solutions de la relation entre ω et k est fondamentale parce qu'elles décrivent les propriétés d'absorption, d'amplification ou d'instabilité du milieu (Cf. Convert, 1964). Pour une direction de propagation donnée, nous verrons que ces solutions n'existent que pour des valeurs, en général complexes, $\omega = \omega(k)$ [ou $k = k(\omega)$] selon que k [ou ω] est la donnée réelle du problème considéré.

Dans le premier cas (k réel donné), on cherchera les ondes de forme spatiale donnée qui peuvent exister dans le plasma, c'est-à-dire les *ondes propres* (ou *modes propres*). On aura alors, pour les solutions $\alpha = \omega - i\gamma$, une onde en $e^{-\gamma t} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, ω caractérisant la fréquence propre de ces oscillations et $\tau = \gamma^{-1}$ le temps d'amortissement ou de croissance (pour l'onde dans son ensemble).

Dans le second cas, on étudiera le problème de la *propagation des ondes* de fréquence ω réelle donnée. Pour les solutions $\beta = \mathbf{k} + i\chi$, l'onde plane sera en $e^{-\chi \cdot \mathbf{r}} \cdot e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$; on aura une vitesse de propagation $v_\varphi = \frac{\omega}{k}$ et une distance d'atténuation ou d'amplification $\Lambda = \chi^{-1}$; dans le cas de l'atténuation, cette distance définit, pour une onde incidente et dans le vide, la profondeur de pénétration dans le milieu. Si $k = 0$, il n'y aura plus propagation: on parlera alors d'onde évanescence, pour laquelle les champs, par exemple, décroissent exponentiellement en fonction de la distance.

Bien entendu, lorsque $\chi < 0$ (amplification), ou $\gamma < 0$ (instabilité), la description linéaire tombera en défaut après une certaine longueur de propagation, ou après un certain temps. De tels phénomènes mettent en jeu des mécanismes non linéaires, qui, nous l'avons dit, ne seront pas traités ici.

Il faut remarquer que ces deux cas correspondent généralement à des situations physiques essentiellement différentes. Chercher les solutions α à k donné, sans préciser l'agent exciteur, revient à chercher les *solutions libres* du milieu: ce seront les solutions d'équations différentielles linéaires sans second membre, qu'on a appelées modes propres. Ces *équations homogènes* ne permettront de préciser l'amplitude des champs, par exemple, qu'à une constante multiplicative près;

seule, la position du champ électrique relativement à la direction de propagation (la *polarisation* de l'onde) sera précisée. Au contraire, s'imposer une fréquence ω implique l'emploi d'une source extérieure (par exemple un générateur d'hyperfréquences) : on aura alors à résoudre des équations différentielles linéaires avec second membre (dû au terme source), et la solution générale de ces *équations inhomogènes* contiendra, à côté d'une solution libre, solution générale de l'équation sans second membre (c'est-à-dire un mode propre), une solution forcée, solution particulière de l'équation avec second membre ; l'amplitude de la solution sera fixée par celle de la source et éventuellement par des conditions aux limites. Comme dans le cas d'un oscillateur, on observera le phénomène de résonance lorsque la fréquence de la source sera égale à celle d'un mode propre. Cependant, des effets de résonance s'observeront aussi pour les modes propres, chaque fois que la fréquence de l'onde sera égale à une fréquence d'oscillation des particules du milieu : fréquence plasma et fréquences gyromagnétiques par exemple : nous verrons qu'alors, l'indice du milieu devient beaucoup plus grand que l'unité, fini ou infini suivant le modèle choisi pour décrire ce milieu.

Les modes propres définis ici sont les ondes de structure la plus simple que le plasma accepte de propager. La solution la plus générale sera obtenue en superposant ces différentes solutions linéaires : c'est le *principe de superposition* valable pour tous les systèmes linéaires. En particulier, dans le cas de milieux finis homogènes, on pourra représenter un mode de propagation, qui n'est plus alors une onde plane (Cf. la propagation des ondes électromagnétiques dans les guides d'ondes), comme une somme infinie d'ondes planes : ce sera le cas en géométrie cylindrique par exemple ; les amplitudes des ondes planes composantes seront déterminées alors par les conditions aux limites (Cf. chap. 4).

Amplitudes complexes

Les solutions ondes planes du type (2.1.1) sont en fait des combinaisons des solutions linéairement indépendantes en cosinus et en sinus :

$$(2.1.5) \quad g_1 = h_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) + h_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t).$$

Pour la commodité des calculs, on a introduit dans (2.1.1) l'exponentielle : cela implique de considérer les amplitudes comme des grandeurs complexes : $G = G_1 + iG_2$. Alors, pour avoir la solution réelle, on prendra la partie réelle de g_1

$$(2.1.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re}(g_1) &= \operatorname{Re}[(G_1 + iG_2) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}] \\ &= G_1 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) - G_2 \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t) \end{aligned}$$

qui est bien de la forme générale (2.1.5).

2.2. Propagation des ondes planes dans le vide et dans un diélectrique isotrope. Description diélectrique

Propagation dans le vide 2.2.1

Dans le vide, caractérisé par sa constante diélectrique ϵ_0 et sa perméabilité magnétique μ_0 , les équations de Maxwell, en l'absence de sources extérieures, s'écrivent :

$$(2.2.1) \quad \nabla \times \mathbf{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}$$

$$(2.2.2) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}$$

$$(2.2.3) \quad \nabla \cdot \mathbf{D} = 0$$

$$(2.2.4) \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

avec les « relations de constitution » du milieu

$$(2.2.5) \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$$(2.2.6) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H},$$

où, dans le système MKSA rationalisé, $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$,

$$(2.2.7) \quad \epsilon_0 = 10^{-9}/36\pi, \quad \mu_0 = 4\pi 10^{-7}$$

On en déduit, d'après (2.2.1 à 6)

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = - \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{D}$$

d'où l'équation de propagation

$$(2.2.8) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}.$$

Cette équation admet des solutions ondes planes du type

$$(2.2.9) \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.$$

Par substitution de (2.2.9) dans (2.2.8), avec $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, $\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = i\mathbf{k}$, $\frac{\partial}{\partial t} = -i\omega$,

on obtient la relation

$$(2.2.10) \quad k^2 \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \omega^2 \mathbf{E}.$$

Cette onde est *transversale* ($\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$ puisque $\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$) et se propage, dans la direction \mathbf{k} , arbitraire, à la vitesse de phase $v_\varphi = \omega/k = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c$, vitesse de la lumière dans le vide. L'indice (2.1.4) est donc $N = 1$.

2.2.2.1. DESCRIPTION DIÉLECTRIQUE

Dans un diélectrique isotrope parfait, un effet nouveau apparaît. Sous l'action du champ électrique extérieur, les charges positives et les charges négatives, liées aux atomes, qui primitivement se neutralisaient, sont déplacées respectivement dans le sens du champ et dans le sens opposé : on dit que le milieu s'est *polarisé*. A cette polarisation est associée le vecteur polarisation par unité de volume, proportionnel à E (description linéaire) :

$$(2.2.11) \quad \mathbf{P} = \epsilon_0 \xi \mathbf{E},$$

le coefficient ξ , caractéristique du milieu, étant la *polarisabilité* ou *susceptibilité électrique*. Cette polarisation diminue le champ électrique E_0 qui existait dans le vide, en l'absence de charges; ainsi, le champ électrique dans le diélectrique vaut ¹, α étant un coefficient dépendant de la forme du diélectrique,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \alpha \xi \mathbf{E}.$$

La relation entre l'induction et le champ électriques dans le milieu devient alors

$$(2.2.12) \quad \begin{aligned} \mathbf{D} &= \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \\ \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 (1 + \xi) \mathbf{E} \end{aligned}$$

ce qui, puisque $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}_0$ par continuité, définit la *constante diélectrique du milieu* :

$$(2.2.13) \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \xi)$$

Les considérations qui précèdent ne sont valables que dans le cas de champs statiques. Si les champs sont variables dans le temps, les effets d'inertie des charges qui créent la polarisation vont se faire sentir. Cela se traduira par un déphasage entre le champ E et l'induction D dans le milieu; pour un champ $E = \xi \cos \omega t = \Re e (\xi e^{-i\omega t})$, on a donc une relation de la forme

1. Cette modification, dans le vide en présence de charges de polarisation ρ_P (les charges induites par le champ E constant) revient à remplacer (2.2.3), qui s'écrit alors

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}' &= \rho_P & \mathbf{D}' &= \epsilon_0 \mathbf{E} \\ \text{par} & & & \\ \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \mathbf{D} &= \epsilon \mathbf{E} \end{aligned}$$

en posant, pour la densité moyenne de charge de polarisation ρ_P

$$\rho_P = -\nabla \cdot \mathbf{P},$$

résultant de la condition évidente

$$\int \rho_P dV = 0,$$

l'intégrale étant étendue à un volume limité par une surface partout extérieure au diélectrique. Alors

$$\nabla \cdot \mathbf{D}' = -\nabla \cdot \mathbf{P} \quad \text{soit} \quad \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}) = \nabla \cdot [\epsilon_0 (1 + \xi) \mathbf{E}] = 0;$$

d'où (2.2.13).

$$(2.2.14) \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}_1 \cos \omega t + \mathbf{D}_2 \sin \omega t,$$

avec

$$(2.2.15) \quad \mathbf{D}_1 = \varepsilon_1 \mathbf{E} \quad \mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}.$$

Ce déphasage, c'est-à-dire l'existence de $\varepsilon_2 \neq 0$, est lié aux pertes dans le diélectrique, c'est-à-dire à la présence d'un courant de conduction, ce que nous montrerons plus loin.

En introduisant une *constante diélectrique complexe*

$$(2.2.16) \quad \varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2$$

on aura, avec des amplitudes complexes (Cf. 2.1.6)

$$(2.2.17) \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E},$$

dont la partie réelle redonne (2.2.14), compte tenu de (2.2.15) et (2.2.16).

On définira, de même, une *susceptibilité complexe*

$$(2.2.18) \quad \xi = \xi_1 + i\xi_2,$$

soit

$$(2.2.19) \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 (1 + \xi_1) \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_0 \xi_2.$$

Dans les équations de Maxwell (2.2.1 à 6), seule la relation (2.2.5) est modifiée et doit être remplacée par (2.2.17). L'équation (2.2.14) peut se mettre sous la forme

$$(2.2.20) \quad \mathbf{D} = \varepsilon_1 \mathbf{E} - \frac{\varepsilon_2}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

d'où

$$(2.1.21) \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} = \varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \omega \varepsilon_2 \mathbf{E} = \varepsilon_0 (1 + \xi_1) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \omega \varepsilon_0 \xi_2 \mathbf{E}.$$

(2.2.21), porté dans (2.2.2), montre que la polarisation en volume a pour effet d'ajouter, au courant de déplacement $\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$ dans le vide, un courant de polarisation $\varepsilon_0 \xi_1 \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$, et un courant de conduction $\omega \varepsilon_0 \xi_2 \mathbf{E}$.

2.2.2.2. DESCRIPTION « CHARGES DANS LE VIDE »

Naturellement, ces résultats se retrouvent en adoptant pour décrire le milieu, le point de vue « charges dans le vide ». Ici sont seules présentes des charges de polarisation, de densité moyenne ρ_p , qui, en champ variable, sont associées au courant de polarisation et au courant de conduction. L'ensemble de ces courants a pour densité

$$(2.2.22) \quad \mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} = (\sigma_1 + i\sigma_2) \mathbf{E},$$

où σ est la conductivité (complexe) du milieu.

Par une transformation analogue à (2.2.20) on a

$$(2.2.23) \quad \mathbf{J} = \sigma_1 \mathbf{E} - \frac{\sigma_2}{\omega} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E}$$

où apparaissent clairement les courants de conduction et de polarisation proprement dits. En portant (2.2.23) dans l'équation :

$$(2.2.24) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}' + \mathbf{J} \quad \mathbf{D}' = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

on obtient

$$(2.2.25) \quad \nabla \times \mathbf{H} = \left(\epsilon_0 - \frac{\sigma_2}{\omega} \right) \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} + \sigma_1 \mathbf{E}.$$

Par comparaison de (2.2.2), compte tenu de (2.2.21) et de (2.2.25), on obtient :

$$(2.2.26) \quad \begin{cases} \epsilon_1 = \epsilon_0 (1 + \xi_1) = \epsilon_0 - \frac{\sigma_2}{\omega} \\ \epsilon_2 = \epsilon_0 \xi_2 = \frac{\sigma_1}{\omega} \end{cases}$$

On en déduit la relation importante entre les grandeurs complexes ϵ et σ

$$(2.2.27) \quad \epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma}{i\omega \epsilon_0} \right)$$

En termes de polarisabilité (2.2.26) donne

$$(2.2.28) \quad \sigma = -i\omega \epsilon_0 \xi,$$

traduisant la relation entre les vecteurs complexes \mathbf{P} et \mathbf{J}

$$(2.2.29) \quad \mathbf{J} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{P}$$

que nous retrouverons plus loin.

Ce qui précède établit l'équivalence entre les deux descriptions « charges dans le vide » et « diélectrique », et montre qu'on peut caractériser le milieu indifféremment par sa constante diélectrique ϵ , sa conductivité σ ou sa polarisabilité ξ (toutes trois complexes). On voit aussi que les pertes dans le milieu sont liées à $\text{Im} \epsilon$ (ou $\text{Im} \xi$) et $\text{Re} \sigma$, tandis que la polarisation proprement dite du milieu est décrite par $\text{Re} \epsilon$ (ou $\text{Re} \xi$) et $\text{Im} \sigma$.

2.2.2.3. ÉQUATION DE DISPERSION

Pour la description diélectrique, les équations de Maxwell sont inchangées, mise à part l'équation $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ [on a aussi $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ à la place de (2.2.6) : nous verrons

(§ 22) que, pratiquement, on peut toujours prendre $\mu = \mu_0$. On aura donc l'équation de propagation, analogue à (2.2.8)

$$(2.2.30) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \epsilon \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E}$$

dont la solution générale est une onde plane en $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, avec, comme en (2.2.10)

$$k^2 = \mu_0 \epsilon \omega^2.$$

La vitesse de phase sera

$$(2.2.31) \quad v_\varphi = (\mu_0 \epsilon)^{-1/2} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon/\epsilon_0}}.$$

2.2.2.4. MÉCANISME PHYSIQUE DE LA DISPERSION

La modification de la vitesse de propagation (2.2.31) dans le milieu, par rapport à celle dans le vide, s'explique clairement dans la description « charges dans le vide ». Sous l'action de l'onde extérieure, les particules deviennent des oscillateurs qui, à leur tour, rayonnent dans toutes les directions. En un point du milieu, il y a donc superposition du champ extérieur et du champ rayonné par les particules (c'est en fait ce champ *total* qui agit sur ces dernières), pour former une onde modifiée qui se propage à une vitesse différente de celle de l'onde extérieure. On a donc un mécanisme de diffusion de l'onde incidente par les particules du milieu; si l'agitation thermique des particules est négligeable, les particules étant initialement au repos, rayonnent des ondes de même fréquence, mais de longueur d'onde différente, ce qui se traduit par un changement de v_φ , décrit macroscopiquement par l'indice $N(k, \omega)$: ce mécanisme est une *diffusion cohérente* (où ω et \mathbf{k} sont déterminés); si l'agitation thermique n'est plus négligeable, l'onde est, en outre, diffusée par les fluctuations thermiques de densité, mais sur des ω et \mathbf{k} différents : on a alors une *diffusion incohérente* dans toutes les directions; celle-ci est très largement dominée dans la direction de l'onde incidente par la diffusion cohérente.

2.2.2.5. INDICE DE PROPAGATION. INDICE D'EXTINCTION

D'après (2.2.31), l'indice a pour valeur

$$(2.2.32) \quad N^2 = \epsilon/\epsilon_0,$$

soit, pour ϵ complexe,

$$(2.2.33) \quad N = N_1 + iN_2,$$

avec, d'après (2.2.32)

$$(2.2.34) \quad \begin{cases} N_1^2 - N_2^2 = \epsilon_1/\epsilon_0 \\ 2N_1N_2 = \epsilon_2/\epsilon_0 \end{cases}$$

N_1 est l'indice de propagation, N_2 , l'indice d'extinction.

De (2.2.34), on déduit facilement

$$(2.2.35) \quad \begin{cases} N_1 = (2\varepsilon_0)^{-1/2} [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2} + \varepsilon_1]^{1/2} \\ N_2 = (2\varepsilon_0)^{-1/2} [(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)^{1/2} - \varepsilon_1]^{1/2}. \end{cases}$$

Dans la limite où les pertes sont faibles $\varepsilon_2 \ll \varepsilon_1$ (c'est le cas des diélectriques usuels), on a donc

$$(2.2.36) \quad \begin{cases} N_1 \approx \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_0} \\ N_2 \approx \varepsilon_2/(2\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_0}). \end{cases}$$

Cependant, dans le cas des plasmas, nous verrons qu'il existe des cas où $\varepsilon_1 < 0$: dans la même limite $\varepsilon_2 \ll |\varepsilon_1|$, on aura donc

$$(2.2.37) \quad \begin{cases} N_1 \approx \varepsilon_2/(2\sqrt{-\varepsilon_1\varepsilon_0}) \\ N_2 \approx \sqrt{-\varepsilon_1/\varepsilon_0}. \end{cases}$$

Au contraire, pour $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ (c'est le cas des métaux, où la conductivité réelle $\sigma_1 = \omega\varepsilon_2$ est prépondérante), on aura

$$(2.2.38) \quad N_1 \approx N_2 \approx \sqrt{\varepsilon_2/2\varepsilon_0} = \sqrt{\sigma_1/2\omega\varepsilon_0}.$$

Pour ω réelle, on a donc $\beta = k + i\chi$; dans la limite $\varepsilon_2 \gg \varepsilon_1$ on retrouve, avec (2.2.38), l'effet de peau observé dans les métaux : la profondeur de pénétration est

$$(2.2.39) \quad \delta = \chi^{-1} = (\omega N_2/c)^{-1} = \sqrt{2/\mu_0\omega\sigma_1}.$$

Pour k réel, on a une fréquence complexe $\alpha = \omega - i\gamma$. Lorsque les pertes sont faibles, il existe une relation très simple entre le temps d'amortissement $\tau = \gamma^{-1}$ (à k réel) et la distance d'atténuation $\Lambda = \chi^{-1}$ (à ω réelle). Plaçons-nous dans le cas $\gamma \ll \omega$. On a, par définition,

$$(2.2.40) \quad kc = \alpha N(\alpha, k) = \alpha [N_1(\alpha, k) + iN_2(\alpha, k)]$$

où, au premier ordre en γ , on a

$$N(\alpha, k) = N_1(\omega, k) + \gamma \frac{\partial N_2}{\partial \omega}(\omega, k) + i \left[\omega N_2(\omega, k) - \gamma \frac{\partial N_1}{\partial \omega}(\omega, k) \right].$$

Les pertes étant faibles, N_2 est aussi du premier ordre en γ : en effet, en prenant les parties réelle et imaginaire de (2.2.40), on trouve :

$$kc = \omega N_1(\omega, k) + (\text{termes d'ordre } \geq 1 \text{ en } \gamma)$$

$$0 = -\omega\gamma \frac{\partial N_1}{\partial \omega} - \gamma N_1 + \omega N_2,$$

soit, en prenant N_1 à l'ordre zéro,

$$\omega N_2 = \gamma \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega N_1) = \gamma c \frac{\partial k}{\partial \omega}.$$

Or, dans le cas $\alpha = \omega$, réelle, β complexe, l'indice d'extinction N_2 est relié à $\chi = \text{Im}\beta$ par

$$N_2 = \chi c / \omega.$$

On a donc, entre γ et χ , la relation

$$\chi = \gamma \frac{\partial k}{\partial \omega}$$

qui s'écrit, en en prenant l'inverse

$$(2.2.41) \quad \Lambda = v_g \tau,$$

où $v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$ est la composante le long de \mathbf{k} de la vitesse de groupe qui, dans un milieu isotrope, s'identifie à la vitesse à laquelle se propage l'énergie (Cf. chap. 5) : la relation (2.2.41) exprime cette propriété.

Enfin, s'il n'y a pas de pertes dans le milieu, $\varepsilon_2 = 0$, N^2 est réel et on a, soit une onde progressive d'amplitude constante ($N = N_1 > 0$), soit une onde évanescence ($N = iN_2$).

2.2.2.6. PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES DE LA CONSTANTE DIÉLECTRIQUE

Dans tout ce qui précède, on a caractérisé l'influence du milieu par une relation telle que (2.2.17) :

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}.$$

En fait, une telle relation n'existe que pour une onde plane (Cf. 2.2.14). Dans le cas où le champ \mathbf{E} varie de façon quelconque dans le temps, la forme la plus générale de la relation *linéaire* entre $\mathbf{D}(t)$ et $\mathbf{E}(t)$ est (Appendice 1), lorsque le milieu est homogène

$$(2.2.42) \quad \mathbf{D}(t) = \varepsilon_0 \mathbf{E}(t) + \varepsilon_0 \int_0^\infty \Phi(\tau) \mathbf{E}(t - \tau) d\tau.$$

En développant les champs en séries de Fourier dans le temps, on obtient, pour chaque composante de fréquence ω , la relation (2.2.17)

$$(2.2.43) \quad \mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}_\omega$$

où, d'après (2.2.42)

$$(2.2.44) \quad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \left[1 + \int_0^\infty \Phi(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \right] = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega).$$

La relation (2.2.44) fixe la *loi de dispersion* du milieu. On en déduit la propriété évidente, ε^* désignant le conjugué de ε ,

$$(2.2.45) \quad \varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega)$$

c'est-à-dire

$$(2.2.46) \quad \begin{cases} \epsilon_1(-\omega) = \epsilon_1(\omega) \\ \epsilon_2(-\omega) = -\epsilon_2(\omega) \end{cases}$$

ϵ_1 est une fonction paire de ω ; ϵ_2 , une fonction impaire.

Il existe de plus, entre ϵ_1 et ϵ_2 , des relations générales : ce sont les relations de Kramers-Kronig (1927) (Cf. Appendice 1).

Naturellement, les considérations qui précèdent s'appliquent aussi aux deux autres constantes ξ et σ , chacune d'elles pouvant être utilisée à la place de ϵ pour caractériser le milieu.

2.2.2.7. DESCRIPTION DIÉLECTRIQUE D'UN PLASMA ISOTROPE

Nous avons vu, au chapitre 1, qu'un plasma soumis à un champ électrique extérieur voit ses particules se déplacer : s'il y a beaucoup de collisions on observe un courant fini, comme dans les conducteurs métalliques; si les collisions sont faibles, certains électrons peuvent être accélérés et, la section efficace de choc diminuant avec l'énergie, ces électrons se « découplent » du reste des particules et gagnent de plus en plus d'énergie (électrons découplés ou « run away »). Dans les deux cas, on a un phénomène qui échappe évidemment à une description diélectrique et exige une approche microscopique.

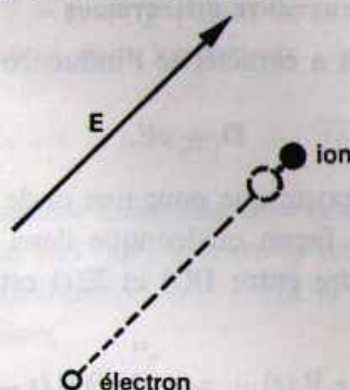


FIGURE 2.2.

Polarisation d'un gaz électrons-ions

Cependant, dans un champ électrique alternatif, les particules oscillent autour de leur position moyenne d'équilibre, créant ainsi des dipôles élémentaires (les ions et les électrons étant déplacés dans des directions opposées, à partir de leur position d'équilibre où ils se neutralisaient électriquement); elles apparaissent donc comme des charges liées, analogues aux charges de polarisation (fig. 2.2). Dans ce cas, il n'y a donc pas de différence essentielle entre un milieu ionisé et un diélectrique imparfait. On pourra donc décrire le plasma soit par une constante diélectrique complexe, soit (dans la description charges dans le vide) par une conductivité complexe, $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$. Dans ce dernier cas, nous avons montré que les effets de polarisation sont liés à σ_2 , tandis que les pertes sont décrites

par σ_1 , ces pertes traduisant l'absorption d'énergie, par exemple sous l'effet des chocs que subissent les particules, au cours de leur mouvement d'oscillation. Naturellement, cette description diélectrique ne sera valable que pour des longueurs d'onde λ telles que

$$(2.2.47)$$

$$\lambda \gg \lambda_{De}$$

2.3. Description diélectrique d'un milieu anisotrope

Lorsque le milieu est anisotrope, par exemple pour un cristal, par sa nature même, ou pour un milieu soumis à un champ magnétique statique \mathbf{B}_0 , les caractères fondamentaux de la description diélectrique des milieux isotropes sont inchangés. Les modifications essentielles apparaissent dans les relations de constitution du milieu, qui, sous les hypothèses choisies, restent linéaires; mais elles ne sont plus de simples relations de proportionnalité entre les composantes correspondantes des inductions et des champs comme dans le cas isotrope, où on avait pu écrire

$$\mathbf{D}_\alpha = \epsilon \mathbf{E}_\alpha \quad (\alpha = x, y \text{ ou } z).$$

Dans le milieu anisotrope, une composante de \mathbf{D} va dépendre de toutes les composantes de \mathbf{E} , par exemple

$$D_x = \epsilon_{xx} E_x + \epsilon_{xy} E_y + \epsilon_{xz} E_z.$$

On aura donc

$$(2.3.1) \quad D_\alpha = \sum_\beta \epsilon_{\alpha\beta} E_\beta.$$

En introduisant le tenseur ϵ , de rang deux, de composantes $\epsilon_{\alpha\beta}$

$$(2.3.2) \quad \epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon_{xx} & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

on pourra écrire (2.3.1) sous la forme équivalente

$$(2.3.3) \quad \mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E}$$

relation qui n'est valable que dans le cas d'une onde plane.

Remarquons que dans les milieux anisotropes, les propriétés de polarisation et d'absorption du milieu ne sont plus reliées, comme dans le cas isotrope, à $\Re \epsilon$ et $\Im \epsilon$ respectivement; nous verrons au chapitre 9 qu'elles sont reliées aux parties hermitique et antihermitique du tenseur ϵ (Cf. p. 293).

Perméabilité magnétique d'un plasma 2.3.1

De la même façon, on écrira, pour le champ magnétique dans le milieu

$$(2.3.4) \quad \mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H},$$

le tenseur μ caractérisant les propriétés magnétiques du milieu. Excepté le cas

des milieux ferromagnétiques, comme les ferrites, par exemple, où μ est beaucoup plus grand que μ_0 , on pourra prendre, pour les solides et liquides non ferromagnétiques, et pour les plasmas plongés dans des champs magnétiques \mathbf{B}_0 forts,

$$\mu = \mu_0 \mathbf{1}$$

où $\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est le tenseur unité, de sorte que (2.3.4) s'écrira, comme dans

le vide

$$(2.3.5) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}.$$

Justifions cette hypothèse dans le cas d'un plasma. Sous l'action de \mathbf{B}_0 , les électrons (la contribution des ions étant considérée alors comme négligeable), tournant à la fréquence $\frac{\omega_b}{2\pi} = -q_e B_0 / 2\pi m_e$ sur leurs orbites de rayon r_b , constituent des dipôles magnétiques élémentaires, de moment magnétique

$$\mathcal{M} = SI = \pi r_b^2 q_e \frac{\omega_b}{2\pi} = -\frac{\mathbf{W}_\perp}{\mathbf{B}_0} \quad (q_e < 0)$$

où $\mathbf{W}_\perp = \frac{1}{2} m v_{e\perp}^2 = \frac{1}{2} m_e (\omega_b r_b)^2$ est l'énergie cinétique des électrons, dans leur mouvement perpendiculaire à \mathbf{B}_0 . En prenant la moyenne sur l'unité de volume, $\overline{\mathbf{W}_\perp} = n_e K T_e$ (correspondant à 2 degrés de liberté), n_e étant la densité électronique, on a un moment total par unité de volume

$$(2.3.6) \quad \mathbf{M} = \overline{\Sigma \mathcal{M}} = -\frac{n_e K T_e}{B_0^2} \mathbf{B}_0$$

aimantation de sens contraire à \mathbf{B}_0 : le plasma est *diamagnétique*. La relation entre \mathbf{B} et \mathbf{H} s'écrit alors pour les champs statiques

$$(2.3.7) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B}_0 - \mathbf{M}$$

$$(2.3.8) \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0} \left(1 + \frac{1}{2} \beta \right) \mathbf{B}_0$$

en posant

$$(2.3.9) \quad \beta = \frac{2\mu_0 n_e K T_e}{B_0^2} = \frac{P_e}{P_m}$$

rapport de la pression cinétique $P_e = n_e K T_e$ à la « pression » du champ magnétique, $P_m = B_0^2 / 2\mu_0$. En présence de l'induction $\tilde{\mathbf{B}}$ d'une onde, (2.3.7) deviendra, pour le champ magnétique total, $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \tilde{\mathbf{B}}$

$$\mathbf{H} = \left(1 + \mu_0 \frac{n_e K T_e}{B^2} \right) \mathbf{B}$$

qui montre clairement qu'il n'existe pas une relation de proportionnalité du type (2.3.4) entre \mathbf{H}_{total} et \mathbf{B}_{total} . Cependant, pour les champs magnétiques assez forts, et les plasmas ni trop denses, ni trop chauds, de telle manière que $\beta \ll 1$, (2.3.8) redonnera pratiquement (2.3.5). Numériquement

$$\beta \approx 4 \cdot 10^{-25} \frac{n(KT)}{B_0^2} \left[\frac{m^{-3} \times (eV)}{(tesla)^2} \right];$$

pour $n = 10^{18} m^{-3}$, $KT_e = 10^2 eV$, $B_0 = 1\,000$ gauss, on a $\beta \approx 4 \cdot 10^{-3}$: l'effet d'aimantation est donc négligeable dans la plupart des cas pratiques où KT_e est beaucoup plus faible que dans l'exemple choisi. Au premier ordre en β , on obtiendra des corrections dues à la température; néanmoins, le modèle précédent est trop approché pour les donner correctement: il faudra utiliser la théorie cinétique pour les obtenir (chap. 6, 7 et 8).

Description charges dans le vide. Tenseur de conductivité d'un plasma 2.3.2

Dans le cas d'un diélectrique comme un cristal, la description du milieu à l'aide d'une conductivité n'a pas de signification physique réelle puisqu'il n'y a pas de charges libres. Il n'en est pas de même dans le cas d'un plasma, où, au contraire, les propriétés du milieu seront décrites à l'aide d'une équation de mouvement des particules: on saura donc relier directement les vitesses des particules, donc au total, la densité de courant \mathbf{J} , au champ électrique total \mathbf{E} régnant dans le milieu. Nous montrerons au chapitre 3 que pour une onde plane monochromatique (\mathbf{k} , ω), on a, au lieu de (2.3.3), une relation du type (2.2.22)

$$(2.3.10) \quad \mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega),$$

où, le milieu étant anisotrope, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{k}, \omega)$, comme ϵ , est maintenant un tenseur, dépendant en général de \mathbf{k} et de ω . La relation (2.3.10) est une généralisation de la loi d'Ohm et n'existe que pour les systèmes homogènes et stationnaires à l'équilibre¹.

Bien que la densité de charge ρ , induite dans le milieu par le champ \mathbf{E} total, figure explicitement dans les équations de Maxwell, il faut noter que le milieu

1. De manière analogue à (2.2.17), la relation (2.3.10) n'existe que pour une onde plane. En général, la densité de courant \mathbf{J} en un point \mathbf{r} , à l'instant t , dépend, à travers le mouvement des charges, de la distribution du champ électrique aux points où ces charges se trouvaient à des instants antérieurs: la relation linéaire la plus générale entre \mathbf{J} et \mathbf{E} sera donc de la forme

$$(2.3.11) \quad \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = \int \boldsymbol{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t') \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}', t') d^3r' dt',$$

qui généralise la forme (2.2.42) de la relation entre \mathbf{D} et \mathbf{E} (on avait supposé qu'il n'y avait pas de dispersion spatiale: ϵ ne dépendait pas de \mathbf{k}). Dans (2.3.11) $\boldsymbol{\Gamma}$ est une grandeur caractéristique du milieu; pour les systèmes homogènes dans l'espace et stationnaires dans le temps, elle ne dépend que des différences $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ et $t - t'$ (invariance par translation dans l'espace et le temps); la relation (2.3.11) définit alors une convolution, dont la transformée de Fourier conduit à (2.3.10).

est complètement décrit par (2.3.10), puisqu'il existe une relation entre ρ et \mathbf{J} , l'équation de conservation de la densité de charge ¹

$$(2.3.12) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

qui pour une onde plane s'écrit

$$(2.3.13) \quad \omega \rho = \mathbf{k} \cdot \mathbf{J} = k J_{//}$$

où $J_{//}$ est la composante longitudinale (parallèle à \mathbf{k}) de \mathbf{J} .

Naturellement, indépendamment de ces charges ρ et courants \mathbf{J} , induits par le champ perturbateur (champ total), il pourra exister dans le plasma des charges ρ_{ex} et des courants \mathbf{J}_{ex} extérieurs comme, par exemple, ceux qui créent la perturbation.

Comparons les deux descriptions « charges dans le vide » et « diélectrique ». Pour une onde plane en $e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$, les équations de Maxwell s'écrivent, avec, pour toute grandeur g_1 (densité, composante d'un champ, etc.)

$$(2.3.14) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} g_1 = -i\omega g_1 \\ \nabla g_1 = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} g_1 = i\mathbf{k} g_1 \end{cases}$$

dans la description charges dans le vide

$$(2.3.15) \quad \begin{cases} (a) & \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ (b) & \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D}' - i(\mathbf{J} + \mathbf{J}_{ex}) \\ (c) & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (d) & \mathbf{k} \cdot \mathbf{D}' = -i(\rho + \rho_{ex}) \\ (e) & \mathbf{D}' = \epsilon_0 \mathbf{E} \\ (f) & \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

dans la description diélectrique

$$(2.3.16) \quad \begin{cases} (a) & \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ (b) & \mathbf{k} \times \mathbf{H} = -\omega \mathbf{D} - i\mathbf{J}_{ex} \\ (c) & \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ (d) & \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = -i\rho_{ex} \\ (e) & \mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \\ (f) & \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \end{cases}$$

où on a fait figurer les termes source, ρ_{ex} et \mathbf{J}_{ex} .

La comparaison des équations (2.3.15 b) et (2.3.16 b) conduit, après élimination de \mathbf{J}_{ex} , à la relation entre $\mathbf{J}(\mathbf{k}, \omega)$ et $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$

$$(2.3.17) \quad \mathbf{J} - i\omega \epsilon_0 \mathbf{E} = -i\omega \epsilon \cdot \mathbf{E}.$$

Avec (2.3.10), (2.3.17) s'écrit

$$(2.3.18) \quad \epsilon \cdot \mathbf{E} = \epsilon_0 \left(\mathbf{1} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{i\omega \epsilon_0} \right) \cdot \mathbf{E},$$

1. (2.3.12), intégrée sur le volume du diélectrique, conduit à (2.2.29) (Cf. note page 42).

puisque $\mathbf{1} \cdot \mathbf{E} \equiv E$. La relation (2.3.18) est une *identité*, valable pour tout champ \mathbf{E} arbitraire : elle résulte de l'équivalence des deux descriptions; on a par conséquent

$$(2.3.19) \quad \epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0} \right),$$

qui généralise, aux milieux anisotropes, la relation (2.2.27).

Dans toute la suite, nous désignerons par *tenseur diélectrique réduit*, le rapport

$$(2.3.20) \quad \kappa = \epsilon/\epsilon_0 = 1 - \frac{\sigma}{i\omega\epsilon_0}.$$

Une fois choisi un modèle pour décrire le milieu, on pourra, en principe, calculer σ , et de là κ , et ce résultat, porté dans les équations de Maxwell, conduira à une condition d'existence de l'onde plane considérée, reliant \mathbf{k} et ω : ce sera l'*équation de dispersion des ondes planes*, permettant la détermination du (ou des) indice(s) du milieu. C'est cette équation que nous allons étudier maintenant.

2.4. Forme générale de l'équation de dispersion

Il résulte de ce qui précède que cette forme générale sera valable pour tous les milieux anisotropes. Plaçons-nous dans le cas où il n'y a pas de charges ni de courants extérieurs, ce qui correspond à la recherche des modes propres. Les équations (2.3.16) s'écrivent alors, en éliminant \mathbf{H} ,

$$(2.4.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k} \times \mathbf{E} = \omega \mathbf{B} \\ \mathbf{k} \times \mathbf{B} = -\omega \mu_0 \mathbf{D} \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \\ \mathbf{D} = \epsilon_0 \kappa \cdot \mathbf{E}. \end{array} \right.$$

Elles montrent que \mathbf{k} , \mathbf{B} , \mathbf{D} forment un trièdre droit (fig. 2.3), tandis que \mathbf{E} est dans le plan (\mathbf{k}, \mathbf{D}) .

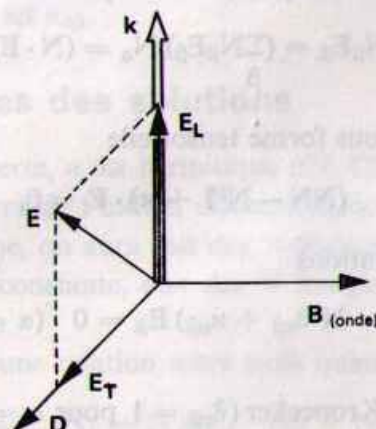


FIGURE 2.3.
Champs de l'onde

Relativement à \mathbf{k} , les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{B} sont transversaux, mais \mathbf{E} ne l'est pas : le champ électrique a une composante longitudinale E_L , qui correspond à la présence des charges libres, ou des charges de polarisation. En effet, l'équation de Poisson s'écrit, pour \mathbf{E}

$$\mathbf{k} \cdot \epsilon_0 \mathbf{E} = \rho,$$

ce qui donne donc ici $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} \neq 0$, donc $E_L \neq 0$. Cette propriété est commune à tous les milieux anisotropes.

En éliminant le champ magnétique \mathbf{B} de l'onde entre (2.4.1 a) et (2.4.1 b), on obtient

$$(2.4.2) \quad \mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} = 0,$$

où $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ est la vitesse de la lumière dans le vide.

Définissons le *vecteur indice*, sans dimension, par

$$(2.4.3) \quad \mathbf{N} = \frac{c}{\omega} \mathbf{k} = \mathbf{k}/k_0,$$

où $k_0 = \frac{\omega}{c}$ est le nombre d'onde dans le vide. Le module de ce vecteur est évidemment l'indice habituel

$$N = \frac{kc}{\omega} = \frac{c}{v_\varphi}.$$

Exprimée avec (2.4.3), (2.4.2) devient

$$(2.4.4) \quad \mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) + \boldsymbol{\kappa} \cdot \mathbf{E} = 0.$$

Compte tenu de

$$\begin{aligned} \mathbf{N} \times (\mathbf{N} \times \mathbf{E}) &= (\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{N} - N^2 \mathbf{E} \\ &= \mathbf{N} \mathbf{N} \cdot \mathbf{E} - N^2 \mathbf{E} \end{aligned}$$

où $\mathbf{N} \mathbf{N}$ représente le produit tensoriel du vecteur \mathbf{N} par lui même (dyade). Cette relation résulte de ce que la composante α du produit tensoriel est

$$\sum_{\beta} N_{\alpha} N_{\beta} E_{\beta} = (\sum_{\beta} N_{\beta} E_{\beta}) N_{\alpha} = (\mathbf{N} \cdot \mathbf{E}) N_{\alpha}.$$

L'équation (2.4.4) s'écrit sous forme tensorielle

$$(2.4.5) \quad (\mathbf{N} \mathbf{N} - N^2 \mathbf{1} + \boldsymbol{\kappa}) \cdot \mathbf{E} = 0,$$

qui représente les trois équations

$$(2.4.6) \quad \sum_{\beta} (N_{\alpha} N_{\beta} - N^2 \delta_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta}) E_{\beta} = 0 \quad (\alpha = x, y, z)$$

où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker ($\delta_{\alpha\beta} = 1$ pour $\alpha = \beta$; $\delta_{\alpha\beta} = 0$ pour $\alpha \neq \beta$).

Le système (2.4.6) de trois équations à trois inconnues E_β n'admet de solution non nulle que si son déterminant (associé au tenseur coefficient de E dans (2.4.5)) est nul.

Cette condition est l'équation de dispersion cherchée :

$$(2.4.7) \quad \mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \text{Det}(\mathbf{N}\mathbf{N} - N^2\mathbf{1} + \boldsymbol{\kappa}) = 0$$

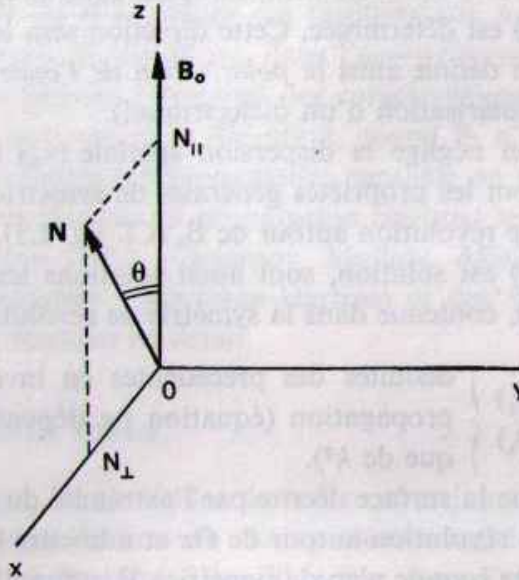
ou

$$(2.4.8) \quad \mathcal{D}(\mathbf{k}, \omega) \equiv \| N_\alpha N_\beta - N^2 \delta_{\alpha\beta} + \kappa_{\alpha\beta} \| = 0.$$

Choisissons l'axe Oz le long du champ magnétique statique \mathbf{B}_0 , et Ox dans le plan $(\mathbf{N}, \mathbf{B}_0)$ (fig. 2.4), avec $(\mathbf{B}_0, \mathbf{N}) = \theta$; l'équation (2.4.4) devient :

$$(2.4.9) \quad \begin{vmatrix} \kappa_{xx} - N^2 \cos^2 \theta & \kappa_{xy} & \kappa_{xz} + N^2 \sin \theta \cos \theta \\ \kappa_{yx} & \kappa_{yy} - N^2 & \kappa_{yz} \\ \kappa_{zx} + N^2 \sin \theta \cos \theta & \kappa_{zy} & \kappa_{zz} - N^2 \sin^2 \theta \end{vmatrix} = 0.$$

FIGURE 2.4.
Système de coordonnées



Pour préciser les solutions de cette équation, il faudra choisir un modèle pour le milieu, afin de déterminer les $\kappa_{\alpha\beta}$.

2.5. Propriétés générales des solutions

— Si le plasma est sans perte, $\boldsymbol{\kappa}$ est hermitique (Cf. Chap. 9). L'équation (2.4.9), qui ne dépend que du carré de l'indice, donnera donc des solutions N^2 réelles : comme dans le cas isotrope, on aura soit des N réels, correspondant à des ondes progressives d'amplitude constante, soit des N imaginaires purs, correspondant à des ondes évanescentes.

— L'équation (2.4.9) est une relation entre trois quantités qui sont

$$\text{soit} \quad \omega, \quad N_\perp = N \sin \theta, \quad N_\parallel = N \cos \theta$$

soit $\omega, N = |\mathbf{N}|, \theta,$

elle permettra donc de déterminer une de ces quantités lorsque les deux autres sont connues. Ainsi, la propagation, dans une direction donnée θ , d'une onde de fréquence ω fixée, sera caractérisée par

$$N = N(\omega, \theta).$$

La fréquence d'un mode propre de forme spatiale donnée (à travers les données, soit N_{\perp} et N_{\parallel} , soit N et θ) sera

$$\omega = \omega(N_{\perp}, N_{\parallel}) \quad \text{ou} \quad \omega = \omega(N, \theta).$$

— A chaque solution de (2.4.9) correspondra, dans le système d'équations (2.4.6), des composantes de \mathbf{E} , définies toutes à une constante multiplicative près. L'amplitude des champs solutions reste arbitraire; au contraire, la direction (relativement à Ox, Oy, Oz) est déterminée. Cette direction sera le plus souvent repérée relativement à \mathbf{k} : on définit ainsi la *polarisation de l'onde* (qui n'a évidemment rien à voir avec la polarisation d'un diélectrique!).

— Dans le cas où on néglige la dispersion spatiale ($\kappa_{\alpha\beta}$ indépendant de k), les solutions de (2.4.9) ont les propriétés générales de symétrie suivantes :

- la symétrie de révolution autour de B_0 (Cf. fig. 2.3),
- si $(\omega_1, k_1, \theta_1)$ est solution, sont aussi solutions les ondes $(\omega_1, k_1, -\theta_1)$, contenue dans la symétrie de révolution autour de B_0 ,

$$\left. \begin{array}{l} (\omega_1, k_1, \pi - \theta_1) \\ (\omega_1, k_1, \pi + \theta_1) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{déduites des précédentes en inversant la direction de} \\ \text{propagation (équation ne dépendant que de } N^2, \text{ donc} \\ \text{que de } k^2). \end{array}$$

Il en résultera que la surface décrite par l'extrémité du vecteur \mathbf{N} (surface des indices) sera donc de révolution autour de Oz et admettra l'origine comme centre de symétrie (donc xOy comme plan de symétrie). Il suffira d'étudier la propagation pour $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Néanmoins, pour une propagation dans une direction « contraire » à B_0 ($\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$), certaines précautions devront être prises pour définir la polarisation du champ (Cf. p. 89).

